高苑科技大學 機械與自動化工程研究所
99 學年度 研究所碩士班一般入學考試 （模擬試題）

考試科目：工程數學

注意事項： 試場內除書寫用筆(限用黑色或藍色鋼筆、原子筆或鉛筆)及橡皮、無色透明無文字墊板、尺規、修正液(帶)、手錶、計算器外，不得攜帶任何有收發訊息功能(如行動電話等)及有礙公共安寧、考試公平之各類器材入場；有關個人之醫療器材如助聽器等，須事先報備並經檢查，方可使用。

1. 變數分離法 (共 10 分)

求微分方程式 $y'=\dfrac{x+1}{y^4+1}$ 的通解。

題解

將微分方程式變數分離，得 $(y^4+1)dy=(x+1)dx$

積分 $\int(y^4+1)dy=\int(x+1)dx$

得 $\dfrac{y^5}{5}+y=\dfrac{x^2}{2}+x+C$

2. 正合微分方程式 (共 15 分)

已知微分方程式 $(2x+3y-2)dx+(3x-4y+1)dy=0$

① 驗證此微分方程式的正合性。 (5 分)

② 求此微分方程式的通解。 (10 分)

題解

① $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial(2x+3y-2)}{\partial y}=3$ ； $\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial(3x-4y+1)}{\partial x}=3$

因 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ 故為正合微分方程式。

② 由 $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}=M=2x+3y-2$ ； $\phi=\int M\,dx=x^2+3xy-2x+c(y)$

$\dfrac{\partial \phi}{\partial y}=3x+c'(y)=3x-4y+1$ 得 $c'(y)=-4y+1$ ； $c(y)=-2y^2+y$

通解為 $x^2+3xy-2x-2y^2+y=c$

3. <u>一階線性微分方程式</u> (共 15 分)

微分方程式 $y'-y=4$

初值條件 $y(0)=1$

① 列出微分方程式之通解。 (10 分)

② 求初值問題之解。 (5 分)

題解

① $y'-y=4$ 為一階線性微分方程式 $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$

直接代入公式，求得通解

$$y=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left[\int e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)\cdot dx+C\right]$$

$$=e^{x}\cdot\left[\int 4\cdot e^{-x}\cdot dx+C\right]$$

$$=e^{x}\cdot\left[-4e^{-x}+C\right]=-4+C\cdot e^{x}$$

② 由初值條件可求得通解中之係數 $C=5$

得初值問題之解 $y=-4+5\cdot e^{x}$

4. 二階常係數微分方程式 (共 35 分)

微分方程式 $y''-2y'-3y=2\cdot e^{x}-10\cdot\sin x$

初值條件 $y(0)=2$ ； $y'(0)=4$

① 請先列出齊次方程式之通解 y_h (10 分)

② 求非齊次方程式之特解 y_p 及全解 $y=y_h+y_p$ (15 分)

③ 求初值問題之解 (10 分)

題解

① 齊次方程式 $y''-2y'-3y=0$ 之通解 $y_h=c_1\cdot e^{-x}+c_2\cdot e^{3x}$

② 假設特解 $y_p=A\cdot e^{x}+B\cdot\sin x+C\cos x$

代入微分方程式 $y''-2y'-3y=2\cdot e^{x}-10\cdot\sin x$ 求得係數 A、B、C

故特解 $y_p=-\frac{1}{2}\cdot e^{x}+2\cdot\sin x-\cos x$

全解 $y=y_h+y_p=c_1e^{-x}+c_2\cdot e^{3x}-\frac{1}{2}\cdot e^{x}+2\cdot\sin x-\cos x$

③ 由初值條件可求得全解中之係數 c_1 與 c_2

得初值問題之解 $y=y_h+y_p=2\cdot e^{-x}+\frac{3}{2}\cdot e^{3x}-\frac{1}{2}\cdot e^{x}+2\cdot\sin x-\cos x$

5. <u>拉氏（Laplace）轉換</u> (共 25 分)

利用拉氏轉換解下列微分方程式：

$y''+8\cdot y'+16\cdot y=8\cdot e^{-2\cdot t}$

初值條件 $y(0)=5$ ； $y'(0)=-10$

$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=L\{f(t)\}$
$t^n \quad (n=1,2,3\cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-a\cdot t}$	$\frac{1}{s+a}$
$t^n\cdot e^{-a\cdot t}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\cos(\omega_o\cdot t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_o^2}$
$\sin(\omega_o\cdot t)$	$\frac{\omega_o}{s^2+\omega_o^2}$

題解

首先將微分方程式經拉氏轉換後，求得 $Y(s)=\frac{5\cdot s^2+40\cdot s+68}{(s+2)(s+4)^2}$ (10 分)

再將 $Y(s)$ 分解為部分分式 $Y(s)=\frac{3}{s+4}+\frac{6}{(s+4)^2}+\frac{2}{s+2}$ (10 分)

最後查表求 $Y(s)$ 之拉氏反轉換 $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=3\cdot e^{-4\cdot t}+6\cdot t\cdot e^{-4\cdot t}+2\cdot e^{-2\cdot t}$ (5 分)