高苑科技大學 機械與自動化工程研究所
98 學年度 研究所碩士班一般入學考試 （模擬試題）

考試科目：**工程數學**

注意事項：	試場內除書寫用筆(限用黑色或藍色鋼筆、原子筆或鉛筆)及橡皮、無色透明無文字墊板、尺規、修正液(帶)、手錶、計算器外，不得攜帶任何有收發訊息功能(如行動電話等)及有礙公共安寧、考試公平之各類器材入場；有關個人之醫療器材如助聽器等，須事先報備並經檢查，方可使用。

1. 拉氏（Laplace）轉換　　(共 25 %)

利用拉氏轉換解下列微分方程式：

$y''+8\cdot y'+16\cdot y=8\cdot e^{-2\cdot t}$

初值條件　$y(0)=5$ ； $y'(0)=-10$

$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=L\{f(t)\}$
$t^n \quad (n=1,2,3\cdots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-a\cdot t}$	$\dfrac{1}{s+a}$
$t^n\cdot e^{-a\cdot t}$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\cos(\omega_o\cdot t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega_o{}^2}$
$\sin(\omega_o\cdot t)$	$\dfrac{\omega_o}{s^2+\omega_o{}^2}$

題解

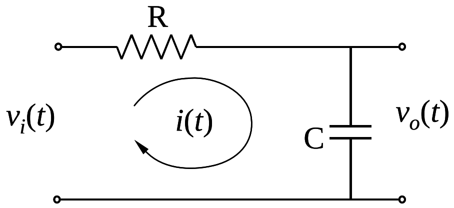
首先將微分方程式經拉氏轉換後，求得 $Y(s)=\dfrac{5\cdot s^2+40\cdot s+68}{(s+2)(s+4)^2}$　(10 %)

再將 $Y(s)$ 分解為部分分式 $Y(s)=\dfrac{3}{s+4}+\dfrac{6}{(s+4)^2}+\dfrac{2}{s+2}$　(10 %)

最後查表求 $Y(s)$ 之拉氏反轉換 $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=3\cdot e^{-4\cdot t}+6\cdot t\cdot e^{-4\cdot t}+2\cdot e^{-2\cdot t}$　(5 %)

2. <u>電路問題之應用</u> (共 35 %)

① 右圖 RC 電路中，電阻 R =20 [Ω]，電容 C = 0.5 [farad]。請列出輸入電壓 $v_i(t)$與輸出電壓 $v_o(t)$之數學關係式。 (10 %)



② 假設初始電壓皆為 0。當輸入電壓 $v_i(t)$=5 [V]時，求輸出電壓 $v_o(t)$。 (15 %)

③ 承上題，求時間 t = 30 秒及趨近於無限大∝時之輸出電壓 v_o 。 (10 %)

題解

① 電阻電位降 $v_R = \mathrm{R} \cdot i$; 電容電位降 $v_C = \frac{1}{\mathrm{C}} \cdot \int i = v_o$ 得 $i = \mathrm{C} \cdot v_o'$

根據柯希荷夫定律 $v_i - v_R - v_C = 0$; $\mathrm{R} \cdot i + v_C = v_i$; $\mathrm{R} \cdot \mathrm{C} \cdot v_o' + v_o = v_i$

將數值代入 得 $10 \cdot v_o' + v_o = v_i$

② 解 $10 \cdot v_o' + v_o = 5$ 得 $v_o(t) = 5(1 - \mathrm{e}^{-0.1 \cdot t})$

③ $v_o(30) = 4.75$; $v_o(\infty) \approx 5$

3. 矩陣 (共 20 %)

矩陣 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

① 求反矩陣 $\mathbf{A}^{-1}$ (5 %)

② 求矩陣 **A** 的特徵值 (5 %)

③ 求矩陣 **A** 的特徵向量 (10 %)

題解

① $A\cdot A^{-1}=I$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4/6 & 1/6\\ -2/6 & 1/6\end{bmatrix}$$

② $\mathrm{P}(\lambda)=\det(\lambda\cdot\mathbf{I}_2-\mathbf{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-5\cdot\lambda+6=(\lambda-2)\cdot(\lambda-3)=0$

故 **A** 的特徵值為 $\lambda_1=2$ 或 $\lambda_2=3$

③ 假設對應於 $\lambda_1=2$ 的特徵向量為 $\mathbf{X}_1=\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\lambda_1-1 & 1\\ -2 & \lambda_1-4\end{bmatrix}\cdot\mathbf{X}_1=\mathbf{0}$; $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

得 $x_1+x_2=0$; $x_1=-x_2$; $\mathbf{X}_1=\begin{Bmatrix}-x_2\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1\\ 1\end{Bmatrix}$

故對應於 $\lambda_1=2$ 的特徵向量為 $\mathbf{X}_1=\begin{Bmatrix}-1\\ 1\end{Bmatrix}$

重複以上步驟，可求得

對應於 $\lambda_2=3$ 的特徵向量為 $\mathbf{X}_2=\begin{Bmatrix}-1\\ 2\end{Bmatrix}$

4. <u>向量分析</u> (共 20 %)

空間中有一平面經過三點 A(2, 4, 1)、B(-1, 0, 1)與 C(-1, 4, 2)

① 求向量 $\overrightarrow{CA}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 方向上之投影長度。 (5 %)

② 求 A、B、C 三點構成之三角形面積。 (5 %)

③ 求 C 點到線 $\overline{AB}$ 的最短距離。 (5 %)

④ 求點 P(1, -2, 1)到 ABC 平面的最短距離。 (5 %)

題解

① $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u} = -3\cdot\mathbf{i} - 4\cdot\mathbf{j} + 0\cdot\mathbf{k}$ ； $\overrightarrow{AC} = \mathbf{v} = -3\cdot\mathbf{i} + 0\cdot\mathbf{j} + 1\cdot\mathbf{k}$

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 9$ ； $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{10}$ ； 投影長度 $\left|\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right| = \dfrac{9}{\sqrt{10}}$

② $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4\cdot\mathbf{i} + 3\cdot\mathbf{j} - 12\cdot\mathbf{k}$ ； $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \sqrt{169} = 13$

三角形 ABC 的面積 $\dfrac{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|}{2} = 6.5$

③ 最短距離 $\dfrac{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \dfrac{13}{\sqrt{10}}$

④ $\overrightarrow{AP} = \mathbf{w} = -1\cdot\mathbf{i} - 6\cdot\mathbf{j} + 0\cdot\mathbf{k}$

最短距離 $\dfrac{|\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|} = \dfrac{14}{13}$

高苑科技大學 機械與自動化工程研究所
98 學年度 研究所碩士班一般入學考試 （模擬試題）

考試科目：微分方程

注意事項： 試場內除書寫用筆(限用黑色或藍色鋼筆、原子筆或鉛筆)及橡皮、無色透明無文字墊板、尺規、修正液(帶)、手錶、計算器外，不得攜帶任何有收發訊息功能(如行動電話等)及有礙公共安寧、考試公平之各類器材入場；有關個人之醫療器材如助聽器等，須事先報備並經檢查，方可使用。

1. 變數分離法 (共 10 %)

求微分方程式 $y'=\dfrac{x+1}{y^4+1}$ 的通解。

題解

將微分方程式變數分離，得 $(y^4+1)dy=(x+1)dx$

積分 $\int (y^4+1)dy=\int (x+1)dx$

得 $\dfrac{y^5}{5}+y=\dfrac{x^2}{2}+x+C$

2. 正合微分方程式 (共 25 %)

已知微分方程式 $(2x+3y-2)dx+(3x-4y+1)dy=0$

① 驗證此微分方程式的正合性。 (10 %)

② 求此微分方程式的通解。 (15 %)

題解

① $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial(2x+3y-2)}{\partial y}=3$ ； $\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial(3x-4y+1)}{\partial x}=3$

因 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ 故為正合微分方程式。

② 由 $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}=M=2x+3y-2$ ； $\phi=\int M\,dx=x^2+3xy-2x+c(y)$

$\dfrac{\partial \phi}{\partial y}=3x+c'(y)=3x-4y+1$ 得 $c'(y)=-4y+1$ ； $c(y)=-2y^2+y$

通解為 $x^2+3xy-2x-2y^2+y=c$

3. <u>一階線性微分方程式</u> (共 20 %)

微分方程式 $y'-y=4$

初值條件 $y(0)=1$

① 列出微分方程式之通解。 (15 %)

② 求初值問題之解。 (5 %)

題解

① $y'-y=4$ 為一階線性微分方程式 $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$

直接代入公式，求得通解

$$y=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left[\int e^{-\int P(x)dx}\cdot Q(x)\cdot dx+C\right]$$

$$=e^{x}\cdot\left[\int 4\cdot e^{-x}\cdot dx+C\right]$$

$$=e^{x}\cdot\left[-4e^{-x}+C\right]=-4+C\cdot e^{x}$$

② 由初值條件可求得通解中之係數 $C=5$

得初值問題之解 $y=-4+5\cdot e^{x}$

4. <u>二階常係數微分方程式</u> (共 45 %)

微分方程式 $y'' - 2y' - 3y = 2 \cdot e^{x} - 10 \cdot \sin x$

初值條件 $y(0) = 2$ ； $y'(0) = 4$

① 請先列出齊次方程式之通解 y_h (10 %)

② 求非齊次方程式之特解 y_p 及全解 $y = y_h + y_p$ (20 %)

③ 求初值問題之解 (15 %)

題解

① 齊次方程式 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 之通解 $y_h = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{3x}$

② 假設特解 $y_p = A \cdot e^{x} + B \cdot \sin x + C \cos x$

代入微分方程式 $y'' - 2y' - 3y = 2 \cdot e^{x} - 10 \cdot \sin x$ 求得係數 A、B、C

故特解 $y_p = -\frac{1}{2} \cdot e^{x} + 2 \cdot \sin x - \cos x$

全解 $y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 \cdot e^{3x} - \frac{1}{2} \cdot e^{x} + 2 \cdot \sin x - \cos x$

③ 由初值條件可求得全解中之係數 c_1 與 c_2

得初值問題之解 $y = y_h + y_p = 2 \cdot e^{-x} + \frac{3}{2} \cdot e^{3x} - \frac{1}{2} \cdot e^{x} + 2 \cdot \sin x - \cos x$