高苑科技大學 機械與自動化工程研究所

100 學年度 研究所碩士班一般入學考試（模擬試題）

考試科目：工程數學

1．變數分離法

求微分方程式 $\frac{dy}{dx}=2x^3(y+1)$ 的通解。

解：

變數分離可得 $\frac{dy}{y+1}=2x^3dx$

兩邊同時積分得

$\ln|y+1|=\frac{1}{2}x^4+c$

2. 使用分離變數法求解 $y'=y^2e^{-x}$

解:

$\frac{dy}{dx}=y^2e^{-x}$

$\frac{1}{y^2}dy=e^{-x}dx$

$-\frac{1}{y}=-e^{-x}+c$ 或 $y=\frac{1}{e^{-x}-c}$

3 求解 Euler 方程式 $x^2y''+2xy'-6y=0$

解:

令 $y=x^m$ 代入得特徵方程式

$m^2+m-6=0$

$y=c_1x^{-3}+c_2x^2$

4．解 $y''+2y'+10y=0$

解:

由特性方程式

$\lambda^2+2\lambda+10=0$

$\Rightarrow \lambda=-1\pm 3i$

通解為

$y=e^{-x}(c_1\sin 3x+C_2\cos 3x)$

5．解初值問題 $y''-3y'+2y=2x+3$，初值條件 $y(0)=4$ ， $y'(0)=5$

解:

由特性方程式

$\lambda^2-3\lambda+2=0$

$\Rightarrow \lambda=1,2$

$y_h=c_1e^x+c_2e^{2x}$

令 $y_p=Ax+B, y_p'=A, y_p''=0$ 代入

$-3A+2(Ax+B)=2x+3$

得 *A=1*，*B=3*

代入初值得 $c_1=-2, c_2=3$

故其解為 $y=-2e^{x}+3e^{2x}+x+3$

6 求解 $y''+2y'-3y=4e^{2x}$

解:

先求齊性解 $y_H=c_1e^{-3x}+c_2e^{x}$

使用待定係數法令 $y_p=Ae^{2x}$，代入原式

可得 $A=\frac{4}{5}$

通解 $y=y_H+y_p=c_1e^{-3x}+c_2e^{x}+\frac{4}{5}e^{2x}$

7 求反拉式 $\frac{4}{s^2+4s+20}$

解:

原式= $\frac{4}{(s+2)^2+4^2}$

使用移位定理可知原函數為 $e^{-2t}\sin(4t)$

8. 利用拉氏轉換解下列微分方程式：

$y''-3y'+2y=0$

初值條件 $y(0)=3, y'(0)=4$

解：

首先將微分方程式經拉氏轉換後，得

$s^2Y(s)-3sY(s)+2Y(s)=3s-5$

$Y(s)=\frac{3s-5}{s^2-3s+2}$

再將 Y(s) 分解為部分分式

$Y(s)=\frac{2}{s-1}+\frac{1}{s-2}$

取反轉換可得其解 $y(t)=2e^{t}+e^{2t}$

9. 若 $F(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}$ 求反轉換 $f(t)$

解：

將該式改寫成 $F(s)=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}$

其中 $A=\lim_{s\to-2}\frac{1}{s+3}=1$

$B=\lim_{s\to-3}\frac{1}{s+2}=-1$

取反轉換可得其解 $f(t)=e^{-2t}-e^{-3t}$