

1. $f(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ t & t > 1 \end{cases}$, 求 $L[f(t)]$

2. $y'' + 2y' + 2y = d(t-p)$, $y(0) = y'(0) = 0$

3. 一流體之流動速度場為 $\vec{V} = 2xz\hat{i} - 4yz\hat{j} + 2zk\hat{k}$, 證明此流場不可旋轉與壓縮並求勢位函數 ϕ 。

4. 求 $f(x, y, z) = 3x^2 + xy^2 + yz$ 在點 $(1, 0, 0)$ 處, 沿著 $(1, 2, -3)$ 方向之方向導數。

5. 求 $I = \int_c (x^2 + y^2) ds$ (1) c 沿著 $y = -x$ 由 $(2, -2)$ 至 $(1, -1)$ (2) c 沿著 $x^2 + y^2 = 4$ 順時針由 $(0, 2)$ 至 $(2, 0)$ 。

6. 利用散度定理求 $\iiint_S x^3 z dy dz + x^2 y z dx + x^2 z^2 dx dy$, 其中 $S: x^2 + y^2 = 4, z=0, z=5$ 所形成之封閉表面。

7. $\vec{F} = 3yz\hat{i} - xz\hat{j} + yz^2\hat{k}$, $S: x^2 + y^2 = 2z, 0 \leq z \leq 2$, 求 $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} ds$ 。

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, 求 $\text{rank}(A)$ 。

9. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ a. 求特徵值及特徵向量 b. 求 P 使 $P^{-1}CP = D$, D

為特徵值矩陣。

10. 求函數 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ 在點 $(1, 1, 2)$ 沿著方向 $2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ 的方向導數

11. 已知向量函數 $F = 3xz^2\hat{i} - yz\hat{j} + (x+2z)\hat{k}$, 試証 $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$

12. 試求向量函數 $F(x, y, z) = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$ 沿著曲線 $C: R = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$,

$0 \leq t \leq 1$ 的線積分值。

13. 一週期性函數 $f(t)$ 在區間 $(-p, p)$ 之值為 $f(t) = t, -p < t < p$ 且 $f(t+2p) = f(t)$ 當 $t \notin (-p, p)$ ，試求 $f(t)$ 之傅立葉級數展開式。

14 若 C 為複數平面上之一圓 $|z| = 2$ ，試求線積分 $\oint_C \frac{z^2 + 3z + 5}{z+1} dz$

15. 求函數 $f(t) = e^{2t}(\cos 3t + \sin 3t)$ 之 Laplace 轉換

16. 求函數 $f(t) = t \sin 3t - t \cosh 3t$ 之 Laplace 轉換

17. 求函數 $f(t) = \frac{\sin 3t}{t}$ 之 Laplace 轉換

18. 求函數 $F(s)$ 之 Laplace 反轉換

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^4} + \frac{1}{(s-3)^5}$$

19. 求函數 $F(s)$ 之 Laplace 反轉換

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+5}$$

20. 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ，試求

(a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T$ (b) $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

(c) $(\mathbf{AB})^T$ (d) $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

21. 試求矩陣 \mathbf{A} 之反矩陣 \mathbf{A}^{-1} 。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

22. 請以矩陣方法求解聯立方程組

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3 \end{cases}$$

23. 試求矩陣 \mathbf{A} 之特徵值及特徵向量。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

24. 請求出可將 \mathbf{A} 對角化之矩陣 \mathbf{P} ，並請將 \mathbf{A} 對角化。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. 試解 $\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y^2)$

2. 試解 $ye^{xy} dx + xe^{xy} dy = 0$

3. 試解 $4y'' + 16y' + 17y = 0$, $y(0)=1$, $y(\pi)=2$

4. 試解 $y'' - y' - 2y = 4x^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=4$

5. 試解 $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

6. $f(x, y, z) = x^2 + xy + z^2$, 且 $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = t^3$ 求 $\frac{df}{dt}$

7. 試解 $\frac{\partial u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$

8. 試解 $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$

9. 試解熱傳方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < p, \quad t > 0,$$

B.C. $u(0,t)=0$ ($t>0$)

$$u(L,t)=0 \quad (t>0)$$

I.C. $u(x,0)=f(x)$ ($0 < x < p$)

10. Solve the boundary value problem

$$u_t = 3u_{xx}, \quad 0 < x < p, \quad t > 0$$

$$u(0,t)=u(p,t)=0, \quad u(x,0)=4\sin 2x$$

11. Solve the differential equations by using an appropriate substitution:

$$x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4, \quad y(1) = 1/2$$

12. Solve the given differential equation by finding an appropriate integrating factor:

$$y(\ln y)dx + (x - \ln y)dy = 0$$

13. Solve the given differential equation: $\frac{dy}{dx} + (\tan x)y = \cos^2 x$, $y(0) = -1$

14. Find the solution of T: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$; $T(0) = T_0$, k , T_m and T_0 are constants

15. Solve the given Cauchy-Euler equation: $x^2 y'' + xy' + y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$

16. Solve: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^4 e^x$

17. Solve the differential equation by variation of parameters.

$$y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

18. $\frac{d^2 x}{dt^2} + w^2 x = F_0 \sin wt$; $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, F_0 and w are constants

19. $y'' + 4y = -2$, $y\left(\frac{p}{8}\right) = \frac{1}{2}$, $y'\left(\frac{p}{8}\right) = 2$

20. $\frac{dr}{d\theta} + \frac{r}{\cos \theta} = \cos \theta$

21. 試求一階線性微分方程式 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 之解

22. 函數 x , $x^{1/2}$ 及 $x^{3/2}$ 在區間 $(0, \infty)$ 上是否為線性獨立?

23. 解 $y'' + 4y = \cos t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$

24. 解 $\frac{dx}{dt} + 3\frac{x}{t} + 4\frac{y}{t} + 2x = t$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x(0) = 1$

25.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3\frac{x}{100} + \frac{y}{100} \\ \frac{dy}{dt} = 3\frac{x}{100} - 3\frac{y}{100} \end{cases}, \quad x(0) = 100, \quad y(0) = 0$$